Probabilités sur un univers quelconque

Table des matières

Ce chapitre généralise les notions abordées dans le chapitre Probabilités sur un univers fini au cas d'un univers infini.

1 Univers et événements

1.1 Rappels

Définition 1.1 : *Expérience aléatoire*

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont le résultat n'est pas prévisible de façon certaine. Un **événement** est une affirmation sur le résultat d'une expérience aléatoire.

Définition 1.2 : *Univers*

On appelle **univers** d'une expérience aléatoire, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. Un résultat de l'expérience est ainsi un élément ω de l'ensemble Ω. Seul l'un d'entre eux est observé à l'issue de l'expérience.

Définition 1.3 : *Evénement*

Un **événement** est une partie A de Ω, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Remarque 1.4 : *Vocabulaire des événements*

- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'un seul élément.
- L'événement A implique l'événement B si et seulement si $A \subset B$.
- L'**événement contraire** à A est $\overline{A}$.
- L'événement *"les événements A et B sont réalisés"* est représenté par $A \cap B$.
- L'événement *"l'un des deux événements A ou B est réalisé"* est représenté par $A \cup B$.
- Si $A \cap B = \varnothing$, A et B ne peuvent arriver en même temps, ils sont incompatibles.

Définition 1.5 : *Probabilité sur un univers fini*

Si Ω est un ensemble fini, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui vérifie

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé fini**.

Parfois, l'ensemble des résultats Ω peut être infini : par exemple, si l'on s'intéresse au temps d'attente dans une file, ou la taille d'une personne. Dans ces cas, tous les sous-ensembles de Ω ne forment peut-être pas des événements intéressants ou observables facilement : par exemple, "le temps d'attente est un nombre irrationnel de secondes".

Lorsque l'univers est infini, il est parfois difficile de définir de manière rigoureuse une probabilité sur toutes les parties de Ω. Nous allons donc nous restreindre à certains sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.2 Ensemble d'événements

Soit à présent Ω un ensemble, potentiellement infini. La définition suivante cherche à définir les propriétés minimales que l'on attend d'un ensemble d'événements, noté $\mathcal{A}$: il faut qu'il soit possible d'effectuer les opérations classiques (intersection, réunion, complémentaire) sur les ensembles/événements de $\mathcal{A}$, et ne pas en sortir. Les trois conditions suivantes suffisent à garantir cela.

Définition 1.6 : *Ensemble d'événements*

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une **ensemble d'événements** si

- (Non vide) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (Stabilité par passage au complémentaire) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- (Stabilité par union dénombrable) Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non) et $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors
$$\bigcup_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}.$$

Tout élément de $\mathcal{A}$ est alors appelé **événement**. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Il ne faut pas confondre un événement noté A avec l'ensemble d'événements $\mathcal{A}$.

Exemple 1. *Soit A une partie de Ω. Montrer que chacun des trois ensembles suivants est un ensemble d'événements.*
$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega).$$

Solution.

Dans le cas où l'univers est fini, on travaillera généralement avec l'ensemble d'événements $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, mais ce n'est pas obligatoire.

Exemple 2. *Si on lance un dé et que l'on s'intéresse uniquement à la parité du résultat obtenu, on pourra donc, si on le souhaite, travailler uniquement sur cet ensemble d'événements. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si le joueur gagne lorsque la face est impair, alors on peut choisir d'utiliser :*

$$\mathcal{A} = \left\{\emptyset, \underbrace{\{1,3,5\}}_{lejoueurgagne}, \underbrace{\{2,4,6\}}_{lejoueurperd}, \Omega\right\}$$

Le choix de l'ensemble d'événements dépend de la modélisation de l'expérience.

Propriété 1.7 : *Ensemble d'événements*

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements. On a les propriétés suivantes :

- (Complémentaire de l'univers) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (Stabilité par intersection/union) Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.
- (Stabilité par différence) Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
- (Stabilité par intersection dénombrable) Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non) et $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors
$$\bigcap_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Un ensemble d'événements est donc aussi stable par union (ou intersection) finie.

1.3 Intersection et union d'événements

Définition 1.8 : *Intersection d'événements*

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non), $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$\omega \in \bigcap_{n\in I} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in I, \omega \in A_n.$$

Autrement dit, $\bigcap\limits_{n\in I} A_n$ est réalisé, si et seulement si, pour tout $n \in I$, A_n est réalisé.

Définition 1.9 : *Union d'événements*

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non), $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$\omega \in \bigcup_{n\in I} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in I, \omega \in A_n.$$

Autrement dit, $\bigcup\limits_{n\in I} A_n$ est réalisé, si et seulement si, il existe au moins un $n \in I$ pour lequel A_n est réalisé.

1.4 Opérations sur les ensembles

Propriété 1.10 : *Distributivité généralisée*

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non), $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$ et B un événement de $\mathcal{A}$, alors :

$$B \cap \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right) = \bigcap_{n\in I} (B \cap A_n) \quad \text{et} \quad B \cup \left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \bigcup_{n\in I} (B \cup A_n).$$

Propriété 1.11 : *Lois de Morgan généralisées*

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou non) et $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$\bigcap_{n\in I} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in I} A_n} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in I} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in I} A_n}.$$

Démonstration. Les démonstrations sont admises. □

Exemple 3. *On lance une infinité de fois un dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "on obtient 6 au n-ème lancer". On définit*

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \textit{ainsi} \quad \overline{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}.$$

A est l'événement "on obtient au moins un 6" et $\overline{A}$ l'événement "on obtient aucun 6".

Définition 1.12 : *Rappel : système complet d'événements*

$(A_n)_{n\in I}$ est un **système complet d'événements** si cette famille forme une partition de Ω :

- $\forall n \in I,\ A_n \neq \emptyset$,
- $\forall (i,j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\forall n \in I,\ \bigcup\limits_{n\in I} A_n = \Omega$.

Exemple 4. *On lance une infinité de fois une pièce. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "on obtient pour la première fois face au n-ème lancer". On définit également A_0 l'événement "on obtient aucun face". Alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.*

2 Probabilités

2.1 Définitions

Définition 2.1 : *Probabilité*

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui vérifie

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Pour toute famille $(A_n)_{n\in I}$ de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$),

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(A_n).$$

  On dit que $\mathbb{P}$ est σ-additive.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

En particulier, si $(A_n)_{n\in I}$ est un système complet d'événements,

$$\sum_{n\in I} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Propriété 2.2 : *Probabilité*

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifie

(i) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(iii) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(iv) Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Théorème 2.3 : *Formule du crible (ou de Poincaré) pour deux événements*

Si A et B sont deux événements, alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Théorème 2.4 : *Formule du crible pour trois événements*

Si A, B et C sont trois événements, alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Les démonstrations de ces théorèmes sont similaires à celles vues dans le chapitre Probabilités sur un univers fini.

2.2 Quasi-certitude, quasi-impossibilité

Définition 2.5 : *Evénement négligeable*

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** (ou quasi-impossible) si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Un événement négligeable n'est pas forcément impossible, mais seulement extrêmement improbable.

Exemple 5. *La probabilité, en lançant une fléchette, qu'elle tombe au centre exact de la cible (ou n'importe quel autre point précis), est nulle. L'événement n'est pas pour autant impossible.*

Définition 2.6 : *Evénement presque sûr*

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **presque sûr** (ou quasi-certain) si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Ces notions dépendent évidemment du choix de $\mathbb{P}$. Une partie de Ω n'est pas négligeable ou presque sûre tant que l'on n'a pas défini de probabilité sur Ω.

Exemple 6. *On lance une infinité de fois une pièce. Si la probabilité d'obtenir pile est p avec $0 < p < 1$, alors l'événement "on obtient que des piles" est négligeable et l'événement "on obtient au moins une fois face" est presque sûr.*

2.3 Théorèmes de la limite monotone

Théorème 2.7 : *Limite monotone (cas croissant)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1},$$

alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. On remarque que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les suites, $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pose

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \quad B_0 = A_0 \quad \text{et pour } n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n.$$

Alors $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ et comme la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(série téléscopique).}$$

□

Théorème 2.8 : *Limite monotone (cas décroissant)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n,$$

alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. On se ramène au cas croissant en passant au complémentaire, puisque si $A_{n+1} \subset A_n$ alors $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$. On a donc d'après le théorème de limite monotone dans le cas croissant :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}).$$

D'après les lois de Morgan,

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}.$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \mathbb{P}(\overline{A_n})\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

Exemple 7. *On lance indéfiniment un dé à 6 faces. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements*

- $A_n =$ " *On n'obtient aucun 6 lors des n premiers lancers.* "
- $A =$ " *On n'obtient jamais de 6.* "

Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Solution.

Corollaire 2.9 : *Limite monotone*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Démonstration. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B_{n+1}$ et $C_{n+1} \subset C_n$. De plus,

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k.$$

On peut donc appliquer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant à $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et dans le cas décroissant à $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

□

Exemple 8. *On lance indéfiniment une pièce de monnaie. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir au moins une face, et qu'il est presque impossible de n'obtenir que des piles.*

Solution.

Les résultats sur le conditionnement et l'indépendance vus sur un univers fini se généralisent à un univers quelconque.

2.4 Conditionnement

Définition 2.10 : *Probabilité conditionnelle*

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de B sachant A** le réel

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ permet de modéliser une situation pour laquelle l'évènement aléatoire associé à A s'est produit de manière certaine. On peut définir une application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathcal{A} &\to [0,1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}_A(B) \end{aligned}$$

L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Théorème 2.11 : *Formule des probabilités composées*

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et A_1, A_2, ..., A_n des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Théorème 2.12 : *Formule de Bayes*

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements de probabilité non nulle.

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Théorème 2.13 : *Formule des probabilités totales*

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, alors pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\in I}\mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n\in I}\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

Les démonstrations de ces théorèmes sont similaires à celles vues dans le chapitre Probabilités sur un univers fini.

2.5 Indépendance

La définition et les propriétés de l'indépendance de deux événements ne changent pas par rapport à celles du chapitre Probabilités sur un univers fini. On adapte simplement celle de l'indépendance mutuelle pour traiter le cas d'une famille (au plus) dénombrable d'événements.

Définition 2.14 : *Indépendance mutuelle*

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements. On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour toute partie finie J tel que $J \subset I$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J}\mathbb{P}(A_n).$$

Exemple 9. *On dispose de deux dés. On les lance simultanément une infinité de fois. À chaque lancer on relève la somme des chiffres des deux faces obtenues. Quelle est la probabilité d'obtenir* 12 *avant d'obtenir* 7 *?*

Solution.